Analyse complexe

Notes de cours, L3

Fournié Nathan

25 juin 2025

Table des matières

Ce document regroupe ma prise de notes du cours d'analyse complexe suivie en L3 à Paul Sabatier délivré par François Berteloot. Il se compose principalement des définitions, propriétés et théorèmes. Les preuves sont, quand elles y sont, succinctes.

1 Fonctions Holomorphes

1.1 Application $\mathbb{R}$-Linéaire et $\mathbb{C}$-Linéaire.

Proposition 1.1. *Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-Linéaire. alors, il existe 4 réels a, b, c, d tels que : $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.*
En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, L s'écrit :

$$L(z) = \alpha z + \beta \overline{z}$$

Avec : $\alpha = \frac{1}{2}((a + d) + i(c - b))$ et $\beta = \frac{1}{2}((a - d) + i(c + b))$
Si de plus L est $\mathbb{C}$-Linéaire, alors : $\beta = 0$ et la matrice de L s'écrit : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Preuve. Il suffit de faire le calcul en remarquant que $x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$. □

Proposition 1.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ alors, pour tout $z \in \Omega$:*

$$D_f(z)u = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right)u + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right)\overline{u} \tag{1}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition précedente à $D_f(z)$ qui est $\mathbb{R}$-linéaire. □

1.2 Opérateur de Cauchy-Riemann

Définition 1.1. *On introduit les opérateurs différentiels :*

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \quad et \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$$

Proposition 1.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ alors, pour tout $z \in \Omega$:*

$$D_f(z)u = \frac{\partial}{\partial z}(z)u + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z)\overline{u} \tag{2}$$

Proposition 1.4. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$.*
Soit $h : \Omega_0 \to \mathbb{R}^2$ avec Ω_0 un ouvert tel que $h(\Omega_0) \subset \Omega$. Alors :

1. $\dfrac{\partial(f + g)}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial z}$ *et* $\dfrac{\partial(f + g)}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}$
2. $\dfrac{\partial fg}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z}g + f\dfrac{\partial g}{\partial z}$ *et* $\dfrac{\partial fg}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}g + f\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}$

3. $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \overline{\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z}}$
4. $\dfrac{\partial (f \circ h)}{\partial z} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial z} \circ h\right) \dfrac{\partial h}{\partial z} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} \circ h\right) \dfrac{\partial \overline{h}}{\partial z}$ *et* $\dfrac{\partial (f \circ h)}{\partial \overline{z}} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial z} \circ h\right) \dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} \circ h\right) \dfrac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}}$

Bref, tout marche bien.

1.3 Holomorphie

Définition 1.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$. On dit que f est holomorphe sur Ω si pour tout $z \in \Omega$, $D_f(z)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.*

Proposition 1.5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f = \phi + i\psi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors, f est holomorphe sur Ω si et seulement si $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = 0$ sur Ω.*
ie : Si et seulement si $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ sur Ω

Preuve. Si f est holomorphe sur Ω, alors

$$D_f(z_0)(i) = \frac{\partial}{\partial z}(z_0)i - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z_0)i = i\frac{\partial}{\partial z}(z_0) + i\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z_0) = iD_f(z_0)$$

d'où : $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$

Réciproquement, si $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$, Alors $D_f(z_0)(u) = \dfrac{\partial}{\partial z}(u)$ qui induit bien une similitude du plan complexe.

□

Ces équations sont appelées équations de Cauchy-Riemann.

Définition 1.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$. f est dite $\mathbb{C}$-dérivable en $z \in \Omega$ si :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe, on note alors $f'(z)$ cette limite.

Proposition 1.6. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*
f est holomorphe sur Ω si et seulement si f est $\mathbb{C}$-dérivable et de dérivée continue sur Ω. Dans ce cas, $f' = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Preuve. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\mathscr{C}^1$
Si f est $\mathbb{C}$-dérivable et de dérivée continue sur Ω, Alors $f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(\|h\|)$ et $D_f(z) = f'(z)$ est bien $\mathbb{C}$-linéaire.
Réciproquement, il n'y a rien à faire. □

Proposition 1.7. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$*, l'ensemble des fonctions holomorphes sur* Ω *est une algèbre pour la somme, le produit et la composition notée* $\mathscr{O}(\Omega)$*.*

Encore une fois, tout marche bien.

Proposition 1.8. *Les polynômes, les fractions rationnelles, l'exponentielle sont des fonctions holomorphes.*

1.4 Formule de Cauchy

Se trouve énoncé ici la formule de Cauchy pour l'anneau et le disque, la preuve est relativement technique puisque elle ne passera pas par la théorie de Cauchy.

Théorème 1.1 (Formule de Cauchy pour l'anneau).
Soit $f \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < A\}$ pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $a, A \in \mathbb{R}$.
Alors, pour tout z tel que $a < r < |z - z_0| < R < A$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})Re^{i\theta}}{z_0 + Re^{i\theta} - z}\mathrm{d}\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})re^{i\theta}}{z_0 + re^{i\theta} - z}\mathrm{d}\theta$$

Théorème 1.2 (Formule de Cauchy pour le disque).
Soit $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$ avec $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < A\}$ pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathbb{R}$.
Alors, pour tout z tel que $|z - z_0| < R < A$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})Re^{i\theta}}{z_0 + Re^{i\theta} - z}\mathrm{d}\theta$$

Preuve. On peut, sans perte de généralité, poser $z_0 = 0$. Soit $z \in \mathcal{A}$ fixé.
Posons $\rho = |z|$ et $\rho_\epsilon^\pm = \rho \pm \epsilon$
Pour $0 < \epsilon < 1$, on a $r < \rho_\epsilon^- < |z| < \rho_\epsilon^+ < R$
Posons :

$$g : \begin{array}{|lcl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ u & \longmapsto & g(u) = \begin{cases} \frac{f(u)-f(z)}{u-z} & \text{si } z \neq u \\ f'(z) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

L'holomorphie de f entraine la continuité de g sur $\mathcal{A}$ et son holomorphie sur $\mathcal{A} \setminus z$ Donc, $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ sur $\mathcal{A} \setminus \{|u| = \rho\}$. Donc :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})re^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} g(\rho_\epsilon^- e^{i\theta})\rho_\epsilon^- e^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta})Re^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} g(\rho_\epsilon^+ e^{i\theta})\rho_\epsilon^+ e^{i\theta}\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

Donc, $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta})Re^{i\theta}\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})re^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \underbrace{(g(\rho_\epsilon^+ e^{i\theta})\rho_\epsilon^+ - g(\rho_\epsilon^- e^{i\theta})\rho_\epsilon^-)e^{i\theta}}_{u_\epsilon(\theta)}\mathrm{d}\theta$

Or, la continuité de g donne : $\lim_{\epsilon \to 0} u_\epsilon(\theta) = 0$
D'où :

$$\int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta})Re^{i\theta}\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})re^{i\theta}\mathrm{d}\theta = 0$$

Il suffit alors de remplacer g par sa définition :

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta}) - f(z)}{Re^{i\theta} - z}Re^{i\theta}\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta} - z}re^{i\theta}\mathrm{d}\theta = 0$$

Puis :

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}-z} Re^{i\theta} \mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-z} re^{i\theta} \mathrm{d}\theta = f(z) \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}-z} Re^{i\theta} \mathrm{d}\theta}_{=2\pi \text{ car } |z|<R} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}-z} re^{i\theta} \mathrm{d}\theta}_{=0 \text{ car } |z|>r} \right)$$

Pour obtenir la formule du disque il suffit de faire tendre r vers 0 en faisant attentions aux cas $z = 0$ et $z \neq 0$. □

2 Transformation de Cauchy

Définition 2.1. *On appelle forme de Radon (mesure de Radon) complexe sur un Compact K une forme linéaire continue sur $(\mathscr{C}(K), \|.\|_\infty)$.*
Avec $\mathscr{C}(K) = \{f : \mathcal{K} \to \mathbb{C} \ ; \ f \text{ continue}\}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{z\in K} |f(z)|$.

Dire que μ est une forme de Radon sur K revient à dire que $\mu : \mathscr{C}(K) \to \mathbb{C}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire et qu'il existe un $A \geqslant 0$ tel que, pour tout $f \in \mathscr{C}(K), |\mu(f)| \leqslant A\|f\|_\infty$.

Exemple : Soit $K = D_b(z_0, R)$ le bord du disque $D(z_0, R)$ et soit $f : K \to \mathbb{C}$ continue. Alors,

$$\mu : \mathscr{C}(K) \ni \phi \mapsto \int_0^{2\pi} \phi(z_0 + Re^{i\theta}) f(z_0 + Re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$$

définie une forme de Radon.

Pour une mesure de Radon μ sur K ; on notera $(\mu|\varphi)$ l'action de cette mesure sur φ, l'application continue sur K.

Théorème 2.1. *Soit μ une forme de Radon sur un compact K de $\mathbb{C}$. On note $\frac{1}{\eta - z}$ la fonction $\eta \in K \mapsto \frac{1}{\eta - z}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus K$. Alors la fonction $\hat{\mu}$ définie par :*

$$\hat{\mu} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus K & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mu(\frac{1}{\eta - z}) = (\mu \mid \frac{1}{\eta - z}) \end{array} \right.$$

S'appelle la transformation de Cauchy de μ et l'on a : $\hat{\mu} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$ et est $\mathbb{C}$-dérivable à tout ordre. De plus :

$$\hat{\mu}^{(k)}(z) = k!\mu \left(\frac{1}{(\eta - z)^{k+1}} \right)$$

Reprenons la forme de Radon de l'exemple, dans ce cas là, $\hat{\mu}(z) = \displaystyle\int_0^{2pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})Re^{i\theta}}{z_0 + Re^{i\theta} - z} \mathrm{d}\theta$ que l'on note $\hat{f}(z)$.

Proposition 2.1. *Soit $f \in \mathscr{C}(D_b(z_0, R))$, Alors, $\hat{f}$ et ses dérivées complexe successives sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus D_b(z_0, R)$. De plus :*

1. $\hat{f}^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{R^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$

2. $\hat{f}'(z) = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})Re^{i\theta}}{(z_0 + Re^{i\theta} - z)^2} \mathrm{d}\theta \quad \forall z \in D(z_0, R)$
3. $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, R)$

Preuve. Le théorème précédent donne déjà 1. et 2. Montrons 3. :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}(1 - \frac{z-z_0}{Re^{i\theta}})} \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{Re^{i\theta}}\right)^n \mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(R^{-n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta\right) (z - z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.
\end{aligned}$$

□

3 Propriètes des fonctions holomorphes.

3.1 Conséquences directes de la formule de Cauchy.

Proposition 3.1 (Inégalité de la moyenne)**.**
Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, si $D(z_0, R) \subset \Omega$ Alors, pour $r < R$:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta$$

Preuve. Écrivons la formule de Cauchy en z_0 sur $D(z_0, R)$ pour $r < R$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$$

Puis, il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire. □

Proposition 3.2 (Holomorphie des dérivées)**.**

$$(f \in \mathcal{O}(\Omega)) \Rightarrow (f' \in \mathcal{O}(\Omega))$$

Preuve. Il suffit d'écrire la formule de Cauchy et de remarque que f est égale à sa transformée de Cauchy puis de conclure avec le théorème 2.1 □

Proposition 3.3 (Phénomène d'extension)**.**

$$[f \in \mathcal{O}(D(z_0, r) \setminus \{z_0\}) \ \textit{et} \ f \in \mathscr{C}(D(z_0, r))] \Rightarrow [f' \in \mathcal{O}(D(z_0, r))]$$

Preuve. Soit $z_0 \in S$, et soit $D(z_0, r_0) \in \Omega$, tel que z_0 soit le seul élément de S sur ce disque. Soit $z \in D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\}$ et $r < r_0$. Par la formule intégrale de Cauchy, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} \mathrm{d}t$$

Puis, par continuité de f sur le compact $D(z_0, r_0)$, On peut passer à la limite sous le signe intégrale et :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})re^{it} \mathrm{d}t$$

d'où l'holomorphie de f en z_0.
On aurait pu aussi remarquer que f est égale à sa transformé de Cauchy sur le disque et conclure directement. $\square$

3.2 Holomorphie et analyticité.

Définition 3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est analytique sur Ω si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω.*

Théorème 3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Alors, f est holomorphe sur Ω si et seulement si elle y est développable en série entière. De plus : pour tout $z \in D(z_0, r)$ avec $z_0 \in \Omega$ et $0 < r < \mathrm{d}(z_0, b_\Omega)$ On a :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Proposition 3.4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_0 > 0$, alors, $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est holomorphe dans le disque de convergence et : $S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$*

Proposition 3.5 (Equivalence Fourier/Taylor).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$, alors, pour $f \in \mathcal{H}(\Omega)$:

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$$

4 Propriétés des fonctions analytiques.

Lemme *:* Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ de rayon de convergence R. Si $f(z_0) = 0$ et $f \not\equiv 0$, alors :

1. $1 \leq \inf\{n \in \mathbb{N}, f^n(z_0) \neq 0\} < +\infty$
2. Il existe $0 < r < R$ tel que z_0 soit l'unique zéro de f sur $D(z_0, r)$.

Proposition 4.1. *Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction non nulle, holomorphe sur Ω, alors les zéros de f sont isolés.*

Preuve. Considérons Ω^* l'ensemble des zéros non isolé de f sur Ω. Ω^* est clairement un fermé. Montrons qu'il est aussi un ouvert.
Soit $w \in \Omega^*$ et soit $r > 0$ tel que $\overline{D}(w, r) \in \Omega$.

$$f|_{D(w,r)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z - w)^n =: S(z)$$

Donc S est nulle sur $D(w, r)$, donc $D(w, r) \subset \Omega^*$, c'est bien un ouvert. Donc par connexité, soit $\Omega*$ est vide, soit c'est Ω^*. □

De ce fait, on obtient l'intégrité de l'anneau $\mathcal{O}(\Omega)$.

Proposition 4.2 (Prolongement analytique)**.**
Soient Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si $E\{z \in \Omega, f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation, alors $f \equiv g$ sur Ω.

PREUVE. Il suffit d'appliquer le principe des zéros isolés à $f - g$ au voisinage du point d'accumulation. □

4.1 Factorisation par les zéros

Proposition 4.3. *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non identiquement nulle. Soit a un zéro de f, alors il existe un unique entier n et une unique fonction g holomorphe sur Ω tels que :*

$$f(z) = (z-a)^n g(z) \quad \textit{et} \quad g(a) \neq 0$$

L'entier n sera appelé multiplicité de a.

PREUVE. Existence : Considérons $r > 0$ et $D := D(a, r)$ de sorte que $f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p (z-a)^p$ sur D. Posons n le plus petit indice tel que a_n soit non nul (qui existe puisque $f \not\equiv 0$). Alors :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^n \sum_{n=p}^{\infty} c_p (z-a)^{n-p} \\ &= (z-a)^n \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_{p+n} (z-a)^p}_{:=g(z)} \end{aligned}$$

poser ainsi g est légitime puisque la somme converge vers $\frac{f(z)}{(z-a)^n}$ pour tout $z \in D \setminus \{a\}$ et pour $z = a$, $g(z) = c_n \neq 0$.
Unicité : Si $(z-a)^n g(z) = (z-a)^{n'} g'(z)$ alors $\frac{(z-a)^n}{(z-a)^{n'}}$ admet une limite non nulle quand $z \to a$ qui n'est possible que si $n = n'$ et donc $g = g'$. □

A partir de ce résultat, comme les zéros d'une fonction f holomorphe sont isolé, on peut essayer de construire une fonction qui se comporterait comme f mais qui serait débarrassée de ses zéros. La proposition suivante précise cela.

Proposition 4.4. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ qui admet un nombre fini de zéros : $\{a_1, ..., a_n\}$ de multiplicités respectives $\{m_1, ..., m_n\}$. Alors, il existe une unique fonction g, holomorphe sur Ω et qui ne s'annule pas sur Ω telle que :*

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{m_i}}$$

PREUVE. Dans un premier temps, on remarque que la fonction g ainsi définie est évidement holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a_1, ..., a_n\}$. D'autre part, on remarque que grâce à la proposition précédentes, au voisinage de chaque zéros la fonction f s'écrit : $f(z) = (z - a_i)^{m_i} g_i(z)$ avec g_i holomorphe sur Ω et ne s'annulant pas en a_i.
Donc, dans ce même voisinage, on a :

$$g(z) = \frac{(z-a_i)^{m_i} g_i(z)}{\prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{m_k}} = \frac{g_i(z)}{\prod_{k=1, k \neq i}^{n} (z - z_k)^{m_k}}$$

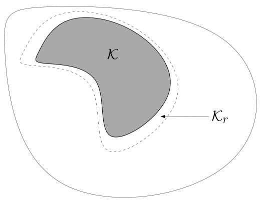
Et donc g est bien holomorphe et ne s'annule pas dans ce voisinage. □

5 Estimations de Cauchy

5.1 Inégalité de Cauchy

Proposition 5.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Soit $\mathcal{K}$ un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathcal{K} \subset \Omega$.*
Pour $0 < r < \mathrm{d}(\mathcal{K}, b_\Omega)$, on pose : $\mathcal{K}_r = \{z \in \Omega : \mathrm{d}(z, \mathcal{K}) \leq r\}$, alors :

$$\sup_{\mathcal{K}} |f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{\mathcal{K}_r} |f|$$



Preuve. Soit $z_0 \in \mathcal{K}$ et $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, Par l'équivalence Fourier/Taylor :

$$\begin{aligned} |\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}| &= \frac{1}{2\pi r^k} |\int_{n=0}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ik\theta} \mathrm{d}\theta| \\ &\leq \frac{1}{2\pi r^k} \int_{n=0}^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta \\ &\leq \frac{1}{r^k} \sup_{\mathcal{K}_r} |f| \end{aligned}$$

□

5.2 Théorème de Liouville

Théorème 5.1.

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \\ f \text{ bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ constante.}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer les inégalités de Cauchy. En effet, pour $0 < r < d(z_0, \partial\mathbb{C}) = \infty$, on a :

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} |f(z_0)| \leq \frac{\sup_{\mathbb{C}}}{r} \to 0$$

Donc f' est nulle, d'où le résultat. □

5.3 Principe du Maximum

Théorème 5.2. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, alors :*

1. $(\exists z_0 \in \Omega; |f(z_0)| = \sup_\Omega |f|) \Rightarrow f$ *constante*

2. Si de plus Ω est borné et f est continue sur $\overline{\Omega}$, alors :

$$\sup_{\overline{\Omega}} |f| = \sup_{b\Omega} |f|$$

Preuve. 1. Posons $M := \sup_{\mathbb{C}} |f|$ et considérons $\Omega^* := \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |f(z)| = M\}$.
Ω^* est un fermé puisque c'est l'image réciproque de $\{M\}$ par l'application continue $|f|$.
De plus il est non vide puisque z_0 y appartient par hypothèse.
Montrons que c'est aussi un ouvert.
Soient $z' \in \Omega^*$ et $r' > 0$ tels que $\overline{D}(z', r') \subset \Omega$, alors pour $r < r'$, l'inégalité de la moyenne nous donne :

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta$$

ie : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (M - |f(z_0 + re^{i\theta})|) \mathrm{d}\theta$ Donc $|f| = 0$ sur $D(z', r')$. Puis, on conclu par connexité de Ω.
2. Puisque $|f|$ est continue sur $\overline{\Omega}$, elle atteint ses bornes et il existe donc $z_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $\sup_{\overline{\Omega}} = |f(z_0)|$. En particulier, $\sup_{\overline{\Omega}} |f| \geqslant \sup_{\partial\Omega} |f|$. De deux choses l'une : si $z_0 \in \Omega$, alors $|f|$ est constante et on a le résultat. Si $z_0 \in \partial\Omega$, alors $\sup_{\partial\Omega} |f| \geqslant \sup_{\overline{\Omega}} |f|$ et on a aussi le résultat. □

5.4 Lemme de Schwarz

Théorème 5.3.

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{O}(D(0,1)) \\ f(0) = 0 \\ |f| \leq 1 \textit{ sur } D(0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow |f'(0)| \leq 1$$

Avec égalité si et seulement si $f(z) = e^{i\theta} z$.

Preuve. Comme $f(0) = 0$ on peut écrire par factorisation $f(z) = zg(z)$ avec g une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$ et qui ne s'annule pas en 0. Par ailleurs, comme $|f| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$ alors $|g| \leq \frac{1}{r}$ dans $\partial D(0, r)$, puis par principe du maximum, : $|g| \leq \frac{1}{r}$ dans $D(0, r)$. On peut alors faire tendre r vers 1 et obtenir : $|g| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$. Et donc, non seulement $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$, mais aussi $|f(z)| \leq |z|$.
Pour le cas d'égalité, si $|g(0)| = 1$, alors par le principe du maximum g est constante. Réciproquement, si $f(z) = ze^{i\theta}$, alors $g(z) = e^{i\theta}$ et donc $|g(0)| = 1$ □

6 Propriétés de robustesse.

6.1 Préservation de l'holomorphie par convergence.

Définition 6.1. *Soient $\Omega \in \mathbb{C}$, $f\Omega \to \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions sur Ω. On dit que f converge uniformément localement vers f si :*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

Pour tout compact K de Ω. On notera alors : $f_n \xrightarrow{u,\ loc} f$

Théorème 6.1. *Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ un ouvert.*

$$\left.\begin{array}{l} f_n \in \mathcal{O}(\Omega) \\ f_n \xrightarrow{u,\ loc} f \end{array}\right\} \Rightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega)$$

On a de plus que : $f_n^{(k)} \xrightarrow{u,\ loc} f^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Preuve. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telles que (f_n) converge uniformément localement vers f sur Ω. On sait alors que f est au moins continue sur Ω.
Soit $z_0 \in \Omega$ et $D := \overline{D}(z_0, r_0) \in \Omega$. Pour $z \in$ et $r < r_0$ la formule de Cauchy dit :

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_n(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z} re^{i\theta} \mathrm{d}\theta$$

Alors, à z fixé, on passe à la limite :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z} re^{i\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \hat{f}$$

Ce qui nous donne l'holomorphie de f sur Ω.
Pour les dérivées, on utilise les inégalités de Cauchy. En effet, soit K un compact de Ω et soit $0 < r < d(K, \partial\Omega)$. On pose $K_r := \bigcup_{z \in K} \overline{D}(z, r)$. Alors, comme $(f_n - n) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, on a :

$$\sup_K |f_n^k - f^k| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{K_r} |f_n - f| \longrightarrow 0$$

D'où la convergence uniforme sur K. □

6.2 Propriétés d'ouverture.

Théorème 6.2 (Lemme Hurwitz)**.** *Soient $\Omega \in \mathbb{C}$ un ouvert, $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que : $f_n \xrightarrow{u,\ loc} f$ Si $a \in \Omega$ est un zéro isolé de f, alors il existe une suite (z_n) de Ω telle que $z_n \to a$ et telle que $f_n(z_n) = 0$ à partir d'un certain rang.*

Preuve. Soit $D := \overline{D}(a, r) \in \Omega$ tel que f ne s'annule pas sur $\overline{D} \setminus a$. Montrons que les f_n possèdent un zéro dans D à partir d'un certain rang.
Si tel n'était pas le cas, il existerait f_{n_k} une sous-suite de f_n qui ne s'annule pas sur D. Considérons alors $g_k := \frac{1}{f_{n_k}}$ qui est holomorphe sur D. Comme f est non nulle sur ∂D, il existe un $m > 0$ tel que $f \geq m$ sur ∂D. Et donc, il existe un rang à partir duquel $f_{n_k} \geq \frac{m}{2}$ sur ∂D. ie : $g_k \leq \frac{2}{m}$ sur ∂D. Par le principe du maximum, on a alors $g_k(a) \leq \frac{2}{m}$. ie : $f_{n_k}(a) \geq \frac{m}{2}$. Qui rentre en contradiction avec le fait que $\lim_n f_n(a) = f(a) = 0$.
La suite ainsi construite de zéros de f_n converge nécessairement vers a puisque toutes ses valeurs d'adhérences sont des zéros de f. □

Proposition 6.1 (D'ouverture)**.** *Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est non constante, alors $f(\Omega)$ est un ouvert.*

PREUVE. Montrons que $D(z,r) \in \Omega \Rightarrow f(z) \in Int(f(D(z,r)))$.
Si tel n'était pas le cas, alors il existerait (w_n) une suite de Ω telle que $w_n \to f(z)$ mais $w_n \notin f(D(z,r))$. Et donc $(f - w_n) =: g_n$ ne s'annulerait pas sur $D(z,r)$ Mais g_n converge u.loc vers $(f - f(z))$. Contradiction avec Hurwitz.
Enfin, comme$Int(f(D(z,r))) \subset Int(f(\Omega))$, on a le résultat. □

7 Logarithmes

7.1 Exponentielle et logarithmes

Proposition 7.1. *Pour tout $w_0 \in \mathbb{C}^*$, il existe un voisinage Ω_0 de w_0 et $(V_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une collection d'ouverts, deux à deux disjoints de la forme : $V_0 + 2ik\pi$ tels que :*

(i) $\exp^{-1}(\Omega_0) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} V_k$

(ii) $\exp|_{V_k} : V_k \to \Omega_0$ *est bijective et d'inverse holomorphe.*

(iii) $(\exp|_{V_k})^{-1} = (\exp|_{V_0})^{-1} + 2ik\pi$

Définition 7.1. *Une fonction f définie sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ est dite détermination du logarithme sur Ω si pour tout $z \in \Omega$:*

$$e^{f(z)} = z$$

On dit que f est la détermination principale du logarithme sur Ω si $1 \in \Omega$ et $f(1) = 0$.

7.2 Revêtements topologiques et relèvement de chemin.

Définition 7.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, un chemin continue dans Ω est une application continue :*

$$\gamma : [0,1] \to \Omega$$

Ses extrémités sont $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$

Définition 7.3. *Deux chemins continus γ_0 et γ_1 dans Ω, ayant les mêmes extrémités, sont dits homotopes à extrémités fixées (h.e.f) s'il existe une application continue*

$$h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$$

telle que :

$$\forall t \in [0,1], \quad h(0,t) = \gamma_0(t) \quad et \quad h(1,t) = \gamma_1(t),$$

et

$$\forall u \in [0,1], \quad h(u,0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \quad et \quad h(u,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1).$$

Définition 7.4. *On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est simplement connexe s'il est connexe et si tout couple de chemins continues dans Ω ayant mêmes extrémités sont h.e.f.*

Définition 7.5. *Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $\rho : \Omega \to \Omega'$.*
Soit $\gamma : [0,1] \to \Omega'$ un chemin continue. On dit que le chemin continue $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \Omega$ est un relèvement de γ par ρ si on a :

$$\begin{tikzcd} & \Omega \arrow[d, "\rho"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & \Omega' \end{tikzcd}$$

ie : si $\tilde{\gamma} \circ \rho = \gamma$

Définition 7.6. *Dans les notation de la définition précédente, on dit que $\rho : \Omega \to \Omega'$ est un revêtement topologique si ρ est continue et si pour tout $w_0 \in \Omega'$, il existe un voisinage Ω_0 de w_0 tel que :*

$$\rho^{-1}(\Omega_0) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$$

et $\rho|_{V_i} : V_i \to \Omega_0$ est un homéomorphisme pour tout $i \in I$. Avec (V_i) une collection d'ouvert de $\mathbb{C}$.

Remarque : l'exponentielle est un revêtement topologique de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^*$.

Théorème 7.1. *Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $p : \Omega \to \Omega'$ un revêtement topologique, alors tout chemin continue γ de Ω' admet un relèvement par ρ.*
De plus, pour tout chemins continues γ_0 et γ_1 de Ω' h.e.f, on a que pour tout relèvements $\tilde{\gamma_0}$ et $\tilde{\gamma_1}$ par ρ :

$$\tilde{\gamma_0} \equiv \tilde{\gamma_1} \Leftrightarrow \tilde{\gamma_0}(0) = \tilde{\gamma_1}(0) \Leftrightarrow \ \tilde{\gamma_0}(1) = \tilde{\gamma_1}(1)$$

7.3 Existence des Logarithmes

Théorème 7.2. *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Si $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et que g est non nulle sur Ω, alors il existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que :*

$$g = \exp \circ f = e^f$$

De plus, $f' = \frac{g'}{g}$ et si $e^f = e^h = g$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $h = f + 2ik\pi$

8 Le théorème de Montel

8.1 Rappels sur le théorème d'Ascoli.

Définition 8.1 (équicontinuité)**.** *Soient X un espace topologique et (Y,d) un espace métrique. Soit F une famille d'applications de X dans Y. On dit que F est équicontinue en $a \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U_a de a tel que :*

$$x \in U_a \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall f \in F$$

On dira que F est équicontinue sur X si elle l'est en tout point de X.

Il est important de noter que le voisinage ne dépend que du point considéré et non des fonctions de F.

Théorème 8.1 (Ascolie). *Soit X un espace topologique séparable (ie : $X = \overline{S}$ avec S dénombrable) et possédant une suite exhaustive de compacts. Soit (Y, d) un espace métrique compact. Alors, si (f_n) est une suite d'application de X dans Y telle que $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue, alors (f_n) possède une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de X*

8.2 Théorème de Montel

Théorème 8.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit (f_n) une suite de $\mathcal{O}(\Omega)$. Si (f_n) est uniformément bornée sur Ω, ie :*

$$f_n(\Omega) \subset \overline{D}(0, M) \ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, (f_n) possède une sous-suite qui converge uniformément localement sur Ω vers une fonctions $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Preuve. Comme $\overline{D}(0, M)$ est un espace métrique compact, il suffit de vérifier que (f_n) est èquicontinue sur Ω puis de conclure par le théorème d'Ascolie.
Soient $a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que :

$$\overline{D}(a, r) \subset \Omega$$

. Soit $d_0 > 0$ tel que $d_0 < d(\overline{D}(a, r); \partial\Omega)$. Par les inégalités de Cauchy :

$$\sup_{z \in \overline{D}(a,r)} |f_n'(z)| \leqslant \frac{1}{d_0} \sup_{z \in \Omega} |f_n(z)| \leqslant \frac{M}{d_0}$$

Mais, comme : $D_{f_n}(z) = f_n'(z)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leqslant \frac{M}{d_0}|z - z'| \ , \quad \forall z, z' \in D(a, r)$$

Montrant que (f_n) est èquicontinue puisque l'on peut faire tendre d_0 vers 0. □

Remarque : Le théorème de Montel peut se voir comme un résultat de compacité. En effet, si on munit $\mathcal{O}(\Omega)$ de la métrique de la convergence uniforme, alors $F_m = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) \ : \ \sup_\Omega |f| \leqslant M\}$ est un compact.

8.3 Application

Théorème 8.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit (f_n) une suite de fonction holomorphe sur Ω. Si (f_n) est uniformément bornée sur Ω et qu'elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors :*

$$f_n \xrightarrow{u,\ loc} h$$

Théorème 8.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit (f_n) une suite de fonction holomorphe sur Ω.*

Si Ω est connexe et si il existe $S \subset \Omega$ avec un point d'accumulation dans Ω, alors :

$$f_n|_S \to h \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow f_n \xrightarrow{u,\ loc} h$$

9 Le théorème de représentation de Riemann.

9.1 Biholomorphisme

Définition 9.1. *Soient Ω et Ω' deux ouvert de $\mathbb{C}$. Un biholomorphisme de Ω sur Ω' est une application $f : \Omega \to \Omega'$; bijective, holomorphe et de réciproque holomorphe.*

Théorème 9.1. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une injection holomorphe, alors $f : \Omega \to f(\Omega)$ est un biholomorphisme.*

Preuve. Nous n'avons qu'à montrer que $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ est holomorphe.
Nous savons déjà que $f(\Omega)$ est un ouvert et que f^{-1} est continue sur $f(\Omega)$ car f est holomorphe et non constante. Puis, f' est non identiquement nulle, donc $C := \{z \in \Omega \ : \ f'(z) = 0\}$ est discret, donc $f(C)$ aussi. Alors, le théorème d'inversion locale uniforme nous dit que f^{-1} est holomorphe sur $f(\Omega) \setminus f(C)$. On peut alors conclure par le phénomène d'extension. □

9.2 Le théorème de Riemann

Lemme : Tout domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe à un ouvert borné de $\mathbb{C}$.

Théorème 9.2 (De Riemann)**.** *Tout ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe et distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe au disque unité $\mathbb{C}$.*

10 Singularités isolés

10.1 Théorème d'extension de Riemann

Théorème 10.1 (D'extension de Riemann)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. Si f est bornée sur un voisinage de z_0, alors f se prolonge holomorphiquement à Ω.*

Preuve. On peut supposer que $\Omega = D(0, r_0)$ pour un $r > 0$ et donc $z_0 = 0$. Posons $M := \sup_{D(0,r_0)\setminus\{0\}} < \infty$. La formule de Cauchy pour l'anneau nous donne :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})re^{i\theta}}{re^{i\theta} - z}\mathrm{d}\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(r'e^{i\theta})r'e^{i\theta}}{r'e^{i\theta} - z}\mathrm{d}\theta$$

pour $0 < r' < |z| < r < r_0$. Il nous suffit alors de montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(r'e^{i\theta})r'e^{i\theta}}{r'e^{i\theta}-z}\mathrm{d}\theta \to 0$ quand $r' \to 0$. Mais on a :

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(r'e^{i\theta})r'e^{i\theta}}{r'e^{i\theta} - z}\mathrm{d}\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Mr'}{|r'e^{i\theta} - z|}\mathrm{d}\theta \underset{r'\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui achève la preuve. □

10.2 Développement de Laurent

Théorème 10.2. *Soit f une fonction holomorphe sur l'anneau $A := \{a < |z - z_0| < b\}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. Il existe une unique suite de complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que :*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n.$$

La série converge normalement sur tout compact de A et les coefficient c_n sont donnés par la formule :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})r^{-n}e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta.$$

10.3 Classification des singularités isolées

Théorème 10.3. *Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé D en z_0 et soit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ son développement en série de Laurent sur ce disque épointé. On pose $N(f) := \inf\{k_i n\mathbb{Z}\ ,\ a_k \neq 0\}$, alors chacune des trois possibilités correspond à un comportement spécifique de f au voisinage de z_0.*

1. *$N(f) \geq 0$, ce qui est équivalent à dire que f est holomorphe sur le disque tout entier. On parle alors de* singularité effaçable.
2. *$-\infty < N(f) \geq 0$, ce qui est équivalent qu'il existe un entier n tel que la fonction $(z - z_0)^n f(z)$ soit holomorphe sur le disque tout entier et ne s'annule pas en z_0. Cette condition est elle même équivalente à demander que $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$. On parlera alors de* pôle.
3. *$N(f) = -\infty$ au quel cas pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $z_n \neq z_0$ pour tout n et $z_n \to \omega$ de sorte que $f(z_n) \longrightarrow \omega$. On parle alors de* singularité

essentielle.

Preuve. Le cas 1 vient de l'unicité du développement en série de Laurent, en effet si $N(f) \geq 0$ alors f est une série entière donc holomorphe sur le disque considéré. Réciproquement, i f est holomorphe sur le disque tout entier, elle s'écrit comme une série entière qui coïncide avec son développement de Laurent.
Pour le cas 2, il est évident que le sens direct de la 1er équivalence est vrai, il suffit d'écrire le développement et de factoriser par $(z - z_0)^n$. Montrons que si $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$, alors il existe un entier n tel que la fonction $(z - z_0)^n f(z)$ soit holomorphe sur le disque tout entier et ne s'annule pas en z_0. On peut considérer la fonction $h(z) := \frac{1}{f(z)}$ qui est holomorphe sur un disque centré en z_0 et de rayon assez petit par le théorème d'extension de Riemann. Enfin, comme z_0 est un zéro de h on peut la factoriser par $(z - z_0)^n$ et en développant en série entière on tombe sur ce que l'on voulait. Pour finir, il est facile de voir que le sens réciproque est vrai. Ce qui termine la preuve du cas 2.
Pour le cas 3, on raisonne par contraposé. Soit ω un complexe, supposons qu'il ne soit pas une valeur d'adhérence de f. On peut alors considérer la fonction $g(z) := \frac{1}{f(z)-\omega}$ qui est holomorphe et bornée sur un petit disque épointé de centre z_0. Par le théorème d'extension de Riemann, on en conclut que g est holomorphe sur tout ce disque. Donc comme $f = \omega + \frac{1}{g}$, on a si $g(z_0) = 0$ que $|f(z)|$ tend vers ∞ quand $z \to z_0$. Donc on est dans le cas 2. Puis, si $g(z_0) \neq 0$, on est dans le cas 1. □

Définition 10.1. *Une fonction est dite* méromorphe *sur un ouvert Ω si elle est holomorphe en dehors d'un ensemble de singularités isolées qui sont toutes des pôles. On notera $M(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphe sur Ω*

Proposition 10.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. L'ensemble $M(\Omega)$ est un corps.*

11 Formule de Cauchy générale

11.1 Outils préliminaires

11.1.1 Intégration le long d'une courbe

Définition 11.1. *L'image γ^* d'un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ est $\gamma([0,1])$. On dit que γ est fermé si $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

Définition 11.2. *On appelle courbe dans $\mathbb{C}$ un chemin qui est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On dira que deux courbes : $\gamma_0 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{C}$ sont équivalentes si il existe une bijection $\rho : [c,d] \to [a,b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $\gamma_0 \circ \rho = \gamma_1$.*
C'est à dire :

$$\begin{tikzcd} [a,b] \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\gamma_1"'] & {[c,d]} \arrow[d, "\gamma_0"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Définition 11.3 (intégrale le long d'une courbe)**.** *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe et f une fonction continue sur γ^*. On définit l'intégrale de f le long de cette courbe par :*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 11.1. *L'intégrale de f entre deux courbes équivalentes est la même. Autrement dit, $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ ne dépend que de la classe d'équivalence de γ.*

11.1.2 Indice d'un point par rapport à une courbe fermée.

Définition 11.4. *Soit γ une courbe fermée dans $\mathbb{C}$ et $a \notin \gamma^*$. L'indice de a par rapport à γ se note $I(a,\gamma)$ et est défini par :*

$$I(a,\gamma) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

Théorème 11.1. *Soit γ une courbe fermée dans $\mathbb{C}$ et $a \notin \gamma^*$.*

1. *$I(a,\gamma) \in \mathbb{Z}$*
2. *l'application $a \mapsto I(a,\gamma)$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et est donc constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$*
3. *$I(a,\gamma)$ est nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

Preuve. Montrons 1. On passe par le revêtement par l'exponentielle de $\sigma(t) := \gamma(t) - a$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{\sigma}"] \arrow[r, "\sigma"'] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

Alors :

$$e^{\tilde{\sigma}} = \sigma$$

donc :

$$\tilde{\sigma}'(t)e^{\tilde{\sigma}(t)} = \sigma'(t).$$

Et on a :

$$\tilde{\sigma}'(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}.$$

De là il vient que :

$$\begin{aligned} I(a,\gamma) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i\pi}(\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)) \end{aligned}$$

Or, $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}(0) + 2ik\pi$ qui achève la preuve. □

11.1.3 Notion de cycle

Définition 11.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Un cycle Γ dans Ω est une somme formelle :*

$$\Gamma := \sum_{j=1}^{p} n_j\gamma_j$$

avec n_j des entiers et γ_j des courbes fermées telles que $\gamma_j^* \in \Omega$.
L'image du cycle Γ est

$$\Gamma^* := \bigcup_{j=1}^{p} \gamma_j^*.$$

Enfin, si f est continue sur Γ^*, on pose :

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z := \sum_{j=1}^{p} n_j \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z.$$

En particulier, on a : $I(a,\Gamma) = \sum_{j=1}^{p} n_j I(a,\gamma_j)$.

Définition 11.6. *Etant donné un cycle Γ, on pose :*

- *L'intérieur de Γ :*

$$\operatorname{int}\Gamma := \{a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \ , \ I(a,\Gamma) \neq 0\}$$

- *L'exterieur de Γ*

$$\operatorname{ext}\Gamma := \{a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \ , \ I(a,\Gamma) = 0\}$$

On dira que Γ est simple si pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ on a : $I(a,\Gamma) \in \{0;1\}$.

11.1.4 Résultats topologiques

Théorème 11.2 (De séparation). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit K un compact inclue dans Ω, alors il existe un cycle simple Γ tel que :*

1. $\Gamma^* \subset \Omega$ *et* $\Gamma^* \cap K = \varnothing$.
2. $K \subset \operatorname{int} \Gamma \subset \Omega$.

On dira alors que Γ est un cycle séparant.

On peut donner une description plus précise du cycle séparant. En effet, il existe un quadrillage de $\mathbb{C}$ par des carrés fermés (Q_j) tel que :

1. $Q_j^* \cap K \neq \varnothing \Rightarrow Q_j \subset \Omega$.
2. $\Gamma^* \subset \displaystyle\bigcup_{Q_j \cap K \neq \varnothing} \partial_{Q_j}$.
3. Pour toute fonction continues sur Ω on a : $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{Q_j \cap K \neq \varnothing} \int_{\partial_{Q_j}} f(z)\mathrm{d}z$.

***Lemme* :** (De Stokes)
Soient Q un carré et f une fonction holomorphe au voisinage de Q, alors :

$$\int_{\partial_Q} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Théorème 11.3 (formule de Cauchy pour les cycles séparant). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit K un compact inclue dans Ω, alors pour tout cycle séparant Γ et pour toute fonctions f holomorphe sur Ω, on a :*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

avec $a \in K$.

Preuve. On pose la fonction g définie de la sorte :

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a \\ f'(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'holomorphie de f entraine la continuité de g sur Ω et son holomorphie sur $\Omega \setminus \{a\}$. Donc g est bien holomorphe sur Ω tout en entier. Il s'ensuit par le lemme de Stokes que :

$$\int_\Gamma g(z)\mathrm{d}z = \sum_{Q_j \cap K \neq \varnothing} \int_{\partial_{Q_j}} g(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Or,

$$\int_\Gamma g(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma (\frac{f(z)}{z-a} - \frac{a}{z-a})\mathrm{d}z.$$

Donc,

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = f(a) \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

Puis, comme $a \in K \subset \operatorname{int}\Gamma$ et que Γ est simple, on a :

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2i\pi I(a,\Gamma) = 2i\pi.$$

Qui achève la preuve. □

11.2 Formule générale de Cauchy

Définition 11.7. *Un cycle Γ est dit homologue à zéro dans un ouvert Ω si $\Gamma^* \subset \Omega$ et que* $\operatorname{int}\Gamma \subset \Omega$.

Théorème 11.4 (Formule de Cauchy générale)**.** *Soit Ω un ouvert et Γ un cycle homologue à zéro dans Ω, alors, pour tout h holomorphe dans Ω, on a :*

$$\int_\Gamma h(z)\mathrm{d}z = 0.$$

De plus, pour tout h holomorphe dans Ω et pour tout point de $\Omega \setminus \Gamma^*$, on a :

$$h(z_0)I(z_0,\Gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{h(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

Proposition 11.2. *Dans un ouvert simplement connexe, toutes les courbes fermées sont homologues à zéros.*

Preuve. L'homotopie entraîne l'homologie ! □

12 Théorème des résidus

12.1 Notion de résidu.

Définition 12.1. *Soient f méromorphe sur Ω et $a \in \Omega$ un pôle de f, par le développement en série de Laurent, on sait que f s'écrit :*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + h(z)$$

avec h une fonction holomorphe sur un disque centré en a et c_{-n} non nul. On dit alors que $\sum_{k=1}^{n} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ est la partie principale de f en a et on appelle c_{-1} le résidu de f en a, que l'on note $\operatorname{Res}(f,a)$.

Théorème 12.1 (Des résidus)**.** *Soit f méromorphe sur Ω, soit A l'ensemble des pôles de f et soit γ un cycle homologue à zéro dans Ω ne rencontrant pas A, alors :*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{a\in A} \operatorname{Res}(f,a) I(\gamma,a).$$

De plus, A est toujours fini.